LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK I.

2004. december 1.

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
10. fejezet (Lineáris leképezések és transzformációk. Vektorterek izomorfizmusa);

további ajánlott irodalom:
Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.
5. fejezet (Lineáris leképezések)

ajánlott feladatok

Linearitás.

1. Feladat. Vizsgálja meg, hogy lineárisak-e az alábbi - valós számtest fölötti vektorterek közötti - leképezések:

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + y, y - 3x)$;
(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, u) \mapsto (x + y, x + z, x + u)$;
(c) $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (2x, -x)$;
(d) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, y + 1, x)$;
(e) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$;
(f) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 1)$;
(g) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (1, -1)$;
(h) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (0, x + y, xy)$;
(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, \sin y)$;
(j) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$;
(k) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (|x|, -y)$;
(l) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$;
(m) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$;
(n) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$, $(i \in \{1, 2 \dots, n\}$, ezek az ún. projekciók);

2. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi transzformációk minden V vektortérnek lineáris transzformációi (ld. a 10.1 Def. utáni megjegyzést):

(a) $\varphi\colon V \to V$, $v \mapsto 0$, ez az ún. zérustranszformáció;
(b) $\varphi\colon V \to V$, $v \mapsto v$, azaz a V identikus transzformációja;
(c) $\varphi\colon V \to V$, $v \mapsto \alpha v$, tetszőleges rögzített α skalárra, (vegyük észre, hogy az előző két példa ennek speciális esete!).

3. Feladat. Mutassa meg, hogy a lineáris leképezések megőrzik a lineáris kombinációkat, azaz ha U, V a T test fölötti vektorterek, és $\varphi\colon U \to V$ egy lineáris leképezés, akkor bármely $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ és $u_1, \ldots, u_n \in U$ esetén

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\Big)\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u_i \varphi)\,.$$

4. Feladat. Határozza meg az 1. Feladatban szereplő lineáris leképezések illetve transzformációk magterét és képterét, ezek egy-egy bázisát és dimenzióját (azaz a transzformáció defektusát és rangját).

5. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a síkbeli (origó kezdőpontú) vektorok terében az alábbi transzformációk lineárisak és írja föl a „képletüket”, mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezésnek:

(a) origó körüli α szöggel való elforgatás (pozitív illetve negatív irányban);
(b) tükrözés az x tengelyre;
(c) tükrözés az y tengelyre;
(d) tükrözés az $y = x$ egyenesre;
(e) tükrözés az $y = -x$ egyenesre;
(f) (*) tükrözés az $\vec{v} = (v_1, v_2)$ irányvektorú egyenesre;
(g) tükrözés az origóra;
(h) origón átmenő egyenesre való merőleges vetítés;
(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ arányú, origóközéppontú középpontos hasonlóság (centrális nyújtás, homotécia);

6. Feladat. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges nemzérus mátrix. Állapítsa meg, hogy az alábbi leképezések lineáris transzformációi-e a valós számtest fölötti $n \times n$-es mátrixok vektorterének

(a) $\tau\colon X \mapsto XA$;
(b) $\tau\colon X \mapsto X + A$;
(c) $\tau\colon X \mapsto XA + AX$;
(d) $\tau\colon X \mapsto XA - AX$;
(e) $\tau\colon X \mapsto XA^2 - AX^2$;
(f) $\tau\colon X \mapsto XA^2 + AX$.

7. Feladat. Állapítsa meg, hogy az alábbi leképezések lineáris transzformációi-e a valós számok teste fölötti, 100-nál kisebb fokú polinomok vektorterének. (Egy általános polinomot p-vel, vagy $p(x)$-el, az i-edfokú tag együtthatóját a_i-vel, a főegyütthatót a_n-nel (tehát $a_n \neq 0$, ha p nem a zéruspolinom), a p polinom fokszámát p^*-gal jelöljük.)

(a) $\chi\colon p(x) \mapsto p(-x)$;
(b) $\chi\colon p(x) \mapsto p(x+1)$;
(c) $\chi\colon p(x) \mapsto p(x+1) - p(x)$;
(d) $\chi\colon p(x) \mapsto xp(x)$;
(e) $\chi\colon p \mapsto a_0 x$;
(f) $\chi\colon p \mapsto a_n x^2$;
(g) $\chi\colon p \mapsto p^* x^3$;
(h) $\chi\colon p \mapsto p$ maradéka $x^7 + 4x + 1$-gyel osztva;
(i) $\chi\colon p \mapsto a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n$.

Ha igen, határozza meg a transzformáció magterét és képterét, és ezek dimenzióját (azaz a transzformáció defektusát és rangját).

8. Feladat. (Freud R. 5.1.6.) Adjon példát olyan leképezésre valamely U és V (ugyanazon T számtest fölötti) vektorterek között, amely
- (a) megőrzi a skalárral való szorzást, de az összeadást nem;
- (b) megőrzi az összeadást, de a skalárral való szorzást nem;
- (c) egyik műveletet sem őrzi meg.

9. Feladat. (Freud R. 5.1.9.) Legyenek U és V ugyanazon T számtest fölötti vektorterek és legyen $\psi\colon U \to V$ lineáris leképezés. Melyek igazak az alábbi állítások közül? $(u_1, \dots, u_m \in U)$:
- (a) Ha $u_1, \dots, u_m$ lineárisan független, akkor $u_1\psi, \dots, u_m\psi$ is lineárisan független.
- (b) Ha $u_1\psi, \dots, u_m\psi$ lineárisan független, akkor $u_1, \dots, u_m$ is lineárisan független.
- (c) Ha $u_1, \dots, u_m$ generátorrendszer U-ban, akkor $u_1\psi, \dots, u_m\psi$ generátorrendszer V-ben.
- (d) Ha $u_1, \dots, u_m$ generátorrendszer U-ban, akkor $u_1\psi, \dots, u_m\psi$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\psi$-ben.
- (e) Ha $u_1\psi, \dots, u_m\psi$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\psi$-ben, akkor $u_1, \dots, u_m$ generátorrendszer U-ban.

10. Feladat. Legyenek V és U ugyanazon T számtest fölötti vektorterek. Bizonyítsa be, hogy egy $\varphi\colon V \to U$ lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha megőrzi a lineáris függetlenséget, azaz ha valahányszor $v_1, \dots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer V-ben, mindannyiszor $v_1\varphi, \dots, v_k\varphi$ lineárisan független vektorrendszer U-ban.

11. Feladat. (Freud R. 5.1.10.+12.) Legyen $\psi\colon V \to U$ lineáris leképezés.
- (a) Mutassa meg, hogy $u\psi = v\psi \iff u - v \in \operatorname{Ker}\psi$.
- (b) Ha $v_1, \dots, v_k$ olyan lineárisan független vektorok V-ben, amelyekre $v_1\psi = \dots = v_k\psi$, akkor $\dim\operatorname{Ker}\psi \geq k-1$.

12. Feladat. Legyen $\varphi\colon V \to U$ lineáris leképezés. A V tetszőleges X részhalmazának *(direkt) képét* $X\varphi_*$-gal, az U tetszőleges Y részhalmazának *inverz* (vagy *ős-)képét* pedig $Y\varphi^*$-gal jelöljük (tehát $X\varphi_* = \{x\varphi \mid x \in X\}$ és $Y\varphi^* = \{v \in V \mid v\varphi \in Y\}$; vegyük észre, hogy ezzel a jelöléssel $\operatorname{Im}\varphi = V\varphi_*$ és $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}_U\}\varphi^*$.)
Bizonyítsa be, hogy altér lineáris leképezés melletti (direkt) képe is altér, valamint altér lineáris leképezés melletti inverz képe is altér.

13. Feladat. Az $\mathbb{R}^4$ vektortér $\{(x, -y, 0, 2x)\colon\ x \in \mathbb{R}\}$ alterét jelölje U.
- (1) Adjon meg olyan $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris transzformációt, amelynek magja (magtere) U.
- (2) Adjon meg olyan $\vartheta\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris transzformációt, amelynek képtere U.

14. Feladat. Legyen U a V véges dimenziós vektortér egy nemtrivialis altere. Bizonyítsa be, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek
- (a) U a magtere;
- (b) U a képtere.

15. Feladat. Mennyi lehet legalább illetve legfeljebb egy $\phi\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^5$ lineáris leképezés magjának dimenziója (azaz ϕ defektusa)? Adjon is meg egy-egy olyan $\phi_0\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^5$ illetve $\phi_1\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^5$ lineáris leképezést, amelyre ez a dimenzió a lehető legkisebb, illetve a legnagyobb.

16. Feladat. Mennyi lehet legalább illetve legfeljebb egy $\psi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^9$ lineáris leképezés magjának dimenziója (azaz ψ defektusa)? Adjon is meg egy-egy olyan $\psi_0\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^9$ illetve $\psi_1\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^9$ lineáris leképezést, amelyre ez a dimenzió a lehető legkisebb, illetve a legnagyobb.

17. Feladat. Van-e olyan φ lineáris transzformációt valamely V vektortéren, amelyre

(1) $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \emptyset$;
(2) $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi \neq \{\underline{0}\}$;
(3) $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Im}\varphi$;
(4) $\operatorname{Ker}\varphi \supset \operatorname{Im}\varphi$;
(5) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Ha igen, akkor természetesen adjon is meg egy-egy ilyen leképezést.

18. Feladat. Bizonyítsa be, hogy valamely n dimenziós V vektortér φ lineáris transzformációjára $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ pontosan akkor, ha

$$\varphi \neq \mathbf{0} \quad \text{de} \quad \varphi^2 (= \varphi\varphi) = \mathbf{0}, \quad \text{továbbá } n \text{ páros és} \quad \dim \operatorname{Im}\varphi = \frac{n}{2}\,.$$

Homogén lineáris egyenletrendszerek.

19. Feladat. Tekintsük a következő $\mathbb{R}$ fölötti homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Legyen $u = (1,1,1,1,1)$, $v = (1,0,-2,0,1)$, $w = (0,-1,0,1,0)$, $x = (1,-2,-2,2,1)$ és $y = (1,0,-1,0,0) \in \mathbb{R}^5$. Az alábbi vektorrendszerek közül melyik alaprendszere (ill. fundamentális megoldásrendszere) a fenti egyenletrendszernek:

(1) u, v, w;
(2) v, w, x;
(3) w, x, y.

20. Feladat. Oldja meg újra a Fagyejev-Szominszkij-féle példatárból korábban kijelölt egyenletrendszerek (ld. a LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK c. feladatsort!) közül a homogéneket (403., 408. - 410., 412. - 413.) és adjon meg mindegyikhez KÉT lényegesen (tehát nem csak a vektorok sorrendjében) különböző fundamentális megoldásrendszert.

Izomorfizmus.

21. Feladat. Adjunk meg egy izomorfizmust a valós szám n-esek $\mathbb{R}^n$ vektortere és az n-nél kisebb fokú, valós együtthatós polinomok $\mathbb{R}_n[x]$ vektortere között.

22. Feladat. Az alábbi $\mathbb{R}$ fölötti vektorterek között keressük meg az izomorfakat (a műveletek a szokásosak, a polinomoknál a 0 polinomot mindig beleértjük):

(a) azon legfeljebb 25-ödfokú valós polinomok halmaza, melyekben minden tag kitevője prímszám;
(b) azon legfeljebb 11-edfokú valós polinomok halmaza, amelyek (mint valós függvények) párosak;

(c) azon legfeljebb 9-edfokú valós polinomok halmaza, amelyeknek az 1 gyöke;
(d) azon legfeljebb 15-ödfokú valós polinomok halmaza, amelyek $x^{10} + x^5 + 1$-el oszthatók;
(e) azon 3×4-es valós mátrixok halmaza, amelyeknek az első és utolsó sora megegyezik;
(f) azon 4×4-es valós mátrixok halmaza, amelyekben a főátlóbeli elemek egyenlők, a mellékátlóbeli elemek pedig nullák;
(g) azon 7×7-es valós mátrixok halmaza, amelyekben a főátlón kívüli elemek egyenlők;
(h) azon végtelen valós számsorozatok halmaza, amelyekben bármely hét szomszédos tag összege 0;
(i) $\mathbb{R}^{17}$ azon elemeinek halmaza, melyekben minden páratlanadik helyen 0 áll.